EINE
STUDIE ÜBER SEIFENBLASEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

UNIVERSITÄT ROSTOCK

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

VON

OTTO DÖRGE

AUS OSTERODE AM HARZ.

ACAD.
LUGD.BAT.
BIBL.

LEIPZIG,

JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1899.

Referent: Prof. Dr. Wachsmuth.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

MEINEN ELTERN.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552725_0094

Erster Theil.

Das Wesen des Carnot'schen Kreisprocesses besteht bekanntlich darin, dass Wärme von einer höheren Temperatur auf eine niedrigere übergeführt wird unter gleichzeitiger Leistung eines bestimmten Quantums Arbeit. Dieses ist bei Innehaltung des Weges und der dabei in Betracht kommenden Temperaturen unabhängig von der arbeitenden Substanz, welche den Kreisprocess durchläuft. Der Weg selbst besteht aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten, die sich zu einer geschlossenen Curve aneinander reihen. — Ein ähnlicher Process lässt sich auf elektrischem Gebiete herstellen; nur tritt hier an Stelle der Wärme höherer und niedrigerer Temperatur elektrische Energie höherer und niedrigerer Spannung. Der durchlaufene Weg besteht aus Curven, die mit den Isothermen und Adiabaten in ihrem Wesen eine grosse Aehnlichkeit besitzen. Man denke sich eine Seifenblase, der man eine gewisse elektrische Ladung mitgetheilt hat. Infolge dessen werden auf alle Theile der Oberfläche normal zu dieser Zugkräfte wirken, die sich aus der ertheilten Ladung und der geometrischen Gestalt der Blase berechnen lassen und die bestrebt sind, die Fläche solange zu vergrössern, bis ihnen durch äussere Druckkräfte das Gegengewicht gehalten wird. Mit einer solchen Blase lässt sich nun folgender Kreisprocess ausführen:

I. Die Blase wird unendlich langsam ausgedehnt, während sie in Berührung mit einem Elektricitätsbehälter von grosser Capacität ist. Das Potential des Behälters sei positiv und gleich V_1. Dieses wird während des Processes wegen der grossen Capacität merklich constant bleiben.

II. Die Berührung wird aufgehoben und die Blase langsam weiter ausgedehnt, aber ohne Zufuhr elektrischer Energie,

bis das Potential der Blase bis zu einem gewissen Werthe V_2 gesunken ist.

III. Die Blase wird mit einem Elektricitätsbehälter sehr grosser Capacität vom Potential V_2 in Berührung gebracht und comprimirt; und schliesslich wird

IV. diese Berührung wiederum aufgehoben, die Blase weiter comprimirt, bis der Anfangszustand wieder hergestellt ist.

Die Aehnlichkeit dieses Kreisprocesses mit dem Carnot'schen ist unverkennbar; die Curven in I. und III. entsprechen Isothermen, dort sind Wärmebehälter, hier Elektricitätsbehälter grosser Capacität; dort bleibt die Temperatur constant und wird Wärme zugeführt, hier bleibt das Potential constant unter Zuführung elektrischer Energie. Die Curven in II. und IV. entsprechen Adiabaten. Beim Carnot'schen Process wird keine Wärme, beim elektrischen Process keine elektrische Energie zugeführt, während die Ladung constant bleibt. Das Resultat ist in beiden Fällen sich ähnlich. In dem einen Falle ist Wärme von einer höheren auf eine niedrigere Temperatur gesunken, in dem anderen elektrische Energie von höherer Spannung auf niedrigere, während in beiden Fällen zugleich ein bestimmtes Quantum Arbeit gewonnen ist. In Bezug auf den arbeitenden Körper wollen wir einige vereinfachende Bedingungen treffen, und zwar soll:

1. der Ballon Kugelgestalt haben und ein Leiter sein, weil nur in diesem Falle der auf die Oberfläche wirkende Zug unabhängig von der Lage des Flächenstückes ist,

2. soll der Ballon keine Oberflächenspannung besitzen, und

3. soll kein Innendruck irgend eines Gases, sondern nur der elektrische Druck auf die Oberfläche wirken, dem durch einen Aussendruck das Gleichgewicht gehalten wird.

Welchen Einfluss diese Beschränkungen auf die praktische Ausführbarkeit des Processes haben, darauf soll an späterer Stelle eingegangen werden. Die erste der Bedingungen findet ihre mathematische Formulirung darin, dass die Capacität gleich dem Radius des Ballons gesetzt wird, während die beiden anderen besagen, dass die von den elektrischen Zugkräften geleistete Arbeit gleich der äusseren gewonnenen Arbeit ist.

Hat der Ballon die Ladung Q, das Potential V, den Radius oder die Capacität r, so besteht offenbar die Relation:

$$Q = r \,.\, V, \tag{1}$$

welche wir die Zustandsgleichung des Ballons nennen wollen. Diese Form ist indessen für unseren Zweck unbrauchbar, weil die geleistete Arbeit durch Integrale von der Form $\int p\, dv$ dargestellt wird, wo p den Druck, v das Volumen des Ballons bezeichnen.

Die Feldstärke an der Oberfläche des Ballons ist:

$$K = \frac{Q}{r^2},$$

und der Zug auf die Flächeneinheit der Kugel:

$$p = \frac{1}{8\pi} K^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4}, \tag{2}$$

falls das umgebende Medium die Dielektricitätsconstante 1 besitzt. Das dazu gehörige Volumen ist:

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3, \tag{3}$$

folglich:

$$Q^6 = (8\pi p)^3 (r^4)^3,$$

oder bei Benutzung von (3)

$$Q^6 = (8\pi p)^3 \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^4.$$

Aus (1) aber folgt:

$$Q^6 = r^6 \,.\, V^6,$$

mithin:

$$(8\pi p)^3 \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^2 = V^6. \tag{4}$$

Diese Form der Zustandsgleichung ist unserem Zweck entsprechend, denn sie giebt uns die den Processen I und III entsprechenden Curven, die den Isothermen entsprechen, falls wir darin $V = V_1$ oder V_2 setzen.

Weiter ergiebt sich aus (3) und (4)

$$Q^6 = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^4 (8\pi p)^3, \tag{5}$$

die ebenfalls eine brauchbare Zustandsgleichung darstellt, da sie uns die Processe II und IV beschreibt, die den Adiabaten analog sind, wenn Q constant gesetzt wird.

Fig. 1 möge den Process, der den Gang $a\,b\,c\,d\,a$ gehe, illustriren. Die auf die Zustände a, b, c, d bezüglichen Werthe von p seien bezeichnet durch p_a, p_b, p_c, p_d, die entsprechenden Werthe des Radius durch r_a, r_b, r_c, r_d.

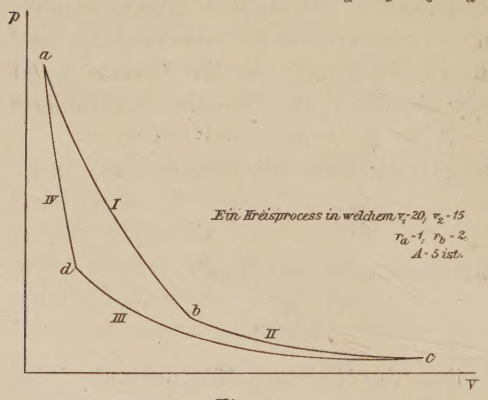

Fig. 1.

Wir betrachten sodann den Process I, der durch die aus (4) folgende Gleichung

$$(4\,a)\quad (8\pi p)^3\left(\frac{3v}{4\pi}\right)^2 = V_1^{\,6}$$

charakterisirt ist.

Auf diesem Wege wird die Arbeit

$$A_I = \int_a^b p\,.\,dv$$

geleistet.

Für dv ergiebt sich aus (4a)

$$dv = -\,V_1^3\,.\,2\,\pi\,.\,8\,\pi\,.\,(8\,\pi\,p)^{-5/2}\,dp\,,$$

folglich:

$$A_I = -\,V_1^3\,.\,2\,.\,8\,.\,\pi^2(8\,\pi)^{-5/2}\int_{p_a}^{p_b} p^{-3/2}\,dp$$

$$(6)\qquad A_I = \tfrac{1}{2}(8\,\pi)^{-1/2}\,V_1^3\,(p_b^{\,-1/2} - p_a^{\,-1/2})\,.$$

Die elektrische Energie des Ballons war im Punkte a

$$\sum_a = \tfrac{1}{2}\,Q_a\,V_1\,,$$

im Punkte b ist sie

$$\sum_b = \tfrac{1}{2}\,Q_b\,V_1\,,$$

falls Q_a und Q_b die Ladungen des Ballons in a und b bezeichnen. Daraus folgt für die Zunahme der Energie beim Process I

$$\sum_b - \sum_a = \tfrac{1}{2}\,V_1\,(Q_b - Q_a)\,.$$

Drücken wir hier Q_a und Q_b mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) durch V_1, p_a und p_b aus, so ergiebt sich:

$$(7)\qquad Q_a^2 = \frac{V_1^4}{8\,\pi\,p_a}\,,\qquad Q_b^2 = \frac{V_1^4}{8\,\pi\,p_b}$$

und schliesslich

$$(8)\qquad \sum_b - \sum_a = \tfrac{1}{2}\,V_1^3\,(8\,\pi)^{-1/2}\,(p_b^{\,-1/2} - p_a^{\,-1/2})\,.$$

Durch Vergleichung der Formeln (6) und (8) ergiebt sich, dass $A_I = \sum_b - \sum_a$ ist, d. h. dass die vom Ballon geleistete Arbeit gleich seiner Energiezunahme ist, oder dass die dem Behälter mit dem Potential V_1 entzogene Energie halb zur Arbeitsleistung, halb zur Erhöhung der elektrischen Energie des Ballons verwandt ist.

Im II. Process wird eine Arbeit

$$A_{II} = \int_{p_b}^{p_c} p \, . \, dv$$

geleistet, wo p und v infolge der Relation (5) durch die Bedingung verknüpft sind:

$$Q_b^6 = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^4 (8\pi p)^3 .$$

Hieraus folgt:

$$dv = -\pi \, . \, (8\pi)^{-3/4} \, Q_b^{3/2} p^{-7/4} \, dp ,$$

$$A_{II} = -\pi \, . \, (8\pi)^{-3/4} \int_{p_b}^{p_c} p^{-3/4} \, dp ,$$

(9) $$A_{II} = -\tfrac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_1^3 p_b^{-3/4} (p_c^{1/4} - p_b^{1/4}),$$

falls wir die Beziehung

$$Q_b^{3/2} = V_1^3 (8\pi)^{-3/4} p_b^{-3/4}$$

berücksichtigen, welche eine Folge der Combination von (1) und (2) ist.

Die Berechnung der Arbeit im III. Process ist der im ersten analog. Man erhält

(10) $$A_{III} = \tfrac{1}{2} V_2^3 (8\pi)^{-1/2} (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}) .$$

Als Unterschied der Energiewerthe in d und c ergiebt sich

(11) $$\sum_d - \sum_c = \tfrac{1}{2} V_2^3 (8\pi)^{-1/2} (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}) .$$

Aus $\sum_d - \sum_c = A_{III}$ folgt, dass die Energie, die auf dem Wege c—d an den Behälter V_2 abgegeben ist, zur Hälfte von der von aussen geleisteten Arbeit und zur Hälfte von der elektrischen Energie des Ballons herrührt. Die Arbeit im IV. Process schliesslich beträgt

(12) $$A_{IV} = -\tfrac{1}{2} (8\pi)^{-1/2} V_2^3 p_d^{-3/4} (p_a^{1/4} - p_d^{1/4}) .$$

Betrachten wir jetzt das Resultat des Kreisprocesses. Laut der Definition von A_{I}, A_{II}, A_{III}, A_{IV} haben wir die nach aussen hin geleistete Arbeit positiv, die von aussen am Ballon geleistete Arbeit negativ gerechnet. Die erstere beträgt

(13) $$A_{\mathrm{I}} + A_{\mathrm{II}} = \tfrac{1}{2}(8\pi)^{-1/2} V_1^3 \{p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2} - (p_c^{1/4} - p_b^{1/4}) p_d^{-3/4}\},$$

die letztere beträgt

(14) $$A_{\mathrm{III}} + A_{\mathrm{IV}} = \tfrac{1}{2}(8\pi)^{-1/2} V_2^3 \{p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2} - (p_a^{1/4} - p_d^{1/4}) p_d^{-3/4}\}.$$

Gewonnen ist die Arbeit:

$$A = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} A_n.$$

Dieser Ausdruck nimmt eine einfache Gestalt an, wenn man bedenkt, dass c sowohl auf der Curve $b\,c$ als auch auf der Curve $c\,d$, und d sowohl auf dem Zweig $c\,d$ als auch auf dem Zweige $d\,a$ liegt. Daraus ergeben sich die Hülfsbeziehungen

(15) $$\frac{V_1^4}{V_2^4} = \frac{p_b}{p_c} = \frac{p_a}{p_d}.$$

Eliminirt man nun aus

$$A = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}} A_n$$

mit Hülfe von (15) p_a und p_b, so ergiebt sich nach einiger Rechnung

(16) $$A = (8\pi)^{-1/2}(V_1 V_2^2 - V_2^3)(p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}),$$

ein Ausdruck, der positiv ist, weil $p_c < p_d$, $V_1 > V_2$ und V_1 und V_2 stets gleiches Vorzeichen haben müssen, wie bald gezeigt werden soll.

Wir hatten ferner für die aus der Quelle V_1 entnommene elektrische Energie gefunden:

$$E_1 = (8\pi)^{-1/2}(p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2}) V_1^3,$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichung

$$p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2} = V_1^{-2} V_2^2 (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}),$$

die aus (15) folgt, für E_1 die bequemere Form

(17) $$E_1 = (8\pi)^{-1/2} V_1 V_2^2 (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2})$$

gewinnen lässt.

E_1 ist positiv gerechnet, wie aus $p_c < p_d$ folgt.

Für die von der Quelle V_2 abgegebene Energie folgt:

$$E_2 = (8\pi)^{-1/2} V_2^3 (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}). \tag{18}$$

Dieser Ausdruck ist negativ. Der Behälter V_2 hat also die Energie $-E_2$ empfangen. Die Formel (18) können wir auch schreiben

$$E_2 = -(8\pi)^{-1/2} (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}) V_2^3 \tag{18a}$$

und wir wollen von jetzt ab das negative E_2 in (18a) mit E_2 bezeichnen, also jetzt setzen:

$$E_2 = (8\pi)^{-1/2} (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}) V_2^3 . \tag{18b}$$

Sodann folgt aus (17) und (18b)

$$\frac{E_1}{V_1} = \frac{E_2}{V_2} . \tag{19}$$

Ferner wollen wir setzen

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \zeta e . \tag{20}$$

Die bis hierher gewonnenen Resultate sollen jetzt discutirt und dazu in Parallele die Ergebnisse des Carnot'schen Kreisprocesses gestellt werden. In dem elektrischen Process, der in der Richtung $a\,b\,c\,d\,a$ verlief, ist eine bestimmte Menge elektrischer Energie von einem höheren Potential auf ein niedrigeres gesunken und zugleich eine gewisse Menge Arbeit gewonnen. Würden wir den Process rückwärts, d. h. in der Richtung $a\,d\,c\,b\,a$ laufen lassen, so würde ein Quantum elektrischer Energie von einem niedrigerem Potential auf ein höheres unter gleichzeitigem Aufwand eines bestimmten Quantums Arbeit gehoben. In dem Carnot'schen Kreisprocess sinkt Wärme von höherer auf niedrigere Temperatur, zugleich wird ein bestimmtes Quantum als äussere Arbeit nutzbar gemacht. In dem dazu inversen Process dagegen wird Wärme von niedrigerer Temperatur auf eine höhere gehoben, gleichzeitig aber von aussen Arbeit in den Process hineingesteckt.

Dass in dieser Analogie an Stelle der Wärmemenge nicht die Elektricitätsmenge tritt, hat offenbar seinen Grund darin, dass eine Elektricitätsmenge an und für sich keine Energie repräsentirt, sondern erst das Product $\frac{1}{2} e . v$, wenn v das Potential des Körpers ist, auf dem sich die Elektricitätsmenge e befindet.

Wenden wir uns nun zu der Formel (19), so ist deren Analogon in der Wärmetheorie

$$\frac{Q_1}{\vartheta_1} = \frac{Q_2}{\vartheta_2},$$

wenn Q_1 die der Quelle mit der Temperatur ϑ_1, Q_2 die der Quelle mit der Temperatur ϑ_2 entnommene Wärmemenge ist.

Aehnlich der Formel (20) ist

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1} = \zeta w.$$

ζw ist der sogenannte ökonomische Coefficient, der uns angiebt, welcher Bruchtheil der aufgenommenen Wärmemenge Q_1 als Arbeit hat nutzbar gemacht werden können. Der Maximalwerth von ζw ist 1; er tritt in dem idealen Falle ein, dass ϑ_2 die Temperatur des absoluten Nullpunktes ist. Der vorliegende Fall aus der Elektricität weist ebenfalls einen ökonomischen Coefficienten auf, der durch

$$\zeta_e = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$$

definirt ist und angiebt, welcher Theil der dem oberen Behälter V_1 entnommenen Energie E_1 beim betrachteten Process in Form von äusserer Arbeit nutzbar gemacht ist. Der grösste Werth von ζe ist auch hier 1 und wird dann erreicht, wenn $V_2 = 0$ ist, ein Fall, der nicht realisirbar ist, da er bedeuten würde $r = \infty$. Dass $V_2 < 0$ wäre und dadurch $\zeta e > 1$ würde, ist unmöglich; denn in b ist das Potential positiv, die Ladung des Ballons also ebenfalls positiv. Auf dem Wege bc wird keine Elektricität zugeführt, folglich kann das Potential des Ballons nicht das Zeichen wechseln.

Construiren wir in der Wärmetheorie einen beliebigen reversiblen Kreisprocess, so lässt sich dieser nach Clausius zerlegen in Isothermen und Adiabaten und es ist $\int dQ/\vartheta = 0$.

Ebenso kann man einen beliebigen reversiblen Kreisprocess für den Ballon in Curen $V = \text{const.}$ und $Q = \text{const.}$ zerlegen und es folgt $\int dE/V = 0$, ein Resultat, dass auch ohne weiteres aus dem elektrischen Grundprincip folgt, dass Elektricität unerschaffbar und unzerstörbar ist.

$2 \int dE/V$ bedeutet nämlich die an den Körper abgegebene Elektricitätsmenge, diese aber muss beim Kreisprocess Null sein.

Zum Schluss dieser Untersuchung noch eine Bemerkung über den Transport elektrischer Energie. Clausius hat bekanntlich den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie die Fassung gegeben: „Wärme geht nicht von selbst von einer tieferen Temperatur auf eine höhere über.“

Bedienen wir uns der Bezeichnungsweise von C. Neumann, so können wir dem Satze die Form geben: „Ein Process vom Gesammteffect $\Theta_1 \uparrow^{q} \Theta_2 \uparrow^{-q}$ ist unmöglich.“

Hier sind Θ_1 und Θ_2 grosse Wärmebehälter von den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2, $\vartheta_1 < \vartheta_2$, q ist eine Wärmemenge, die von Θ_1 auf Θ_2 befördert gedacht wird. Setzen wir statt Θ_1 und Θ_2 zwei Quellen $\sum_1$ und $\sum_2$ elektrischer Energie von grosser Capacität und den Potentialen V_1 und V_2, wo $V_1 > V_2$ und E ein Quantum elektrischer Energie ist, so ist hier weder der Process vom Gesammteffect

$$\sum_1 \uparrow^{E} \sum_2 \uparrow^{-E}$$

noch der Process:

$$\sum_2 \uparrow^{-E} \sum_2 \uparrow^{E}$$

möglich, und zwar folgt dies wieder aus der Unerschaffbarkeit und Unzerstörbarkeit der Elektricität. Es muss nach diesem Princip in beiden Prozessen nämlich

$$2\frac{E}{V_1} - 2\frac{E}{V_2} = 0$$

sein, was nur erfüllt ist, falls $V_1 = V_2$ ist. In Worten: Ein Process, bei dem nur elektrische Energie von einem Behälter auf einen anderen übertragen wird, ist nur möglich, wenn die Potentiale beider Quellen gleich sind. Bei der Wärme dagegen ist der dem ersten Process entsprechende unmöglich, während das Analogon zum zweiten Process der natürliche Vorgang ist.

Zweiter Theil.

Am Anfang des ersten Theiles waren in Bezug auf den Kreisprocess einige beschränkende Annahmen gemacht, um den Fall möglichst einfach zu gestalten. Von diesen Bedingungen wollen wir jetzt nur noch die erste beibehalten; diese ist ja wegen des geringen Gewichtes der Seifenblase stets nahezu erfüllt. Die beiden anderen dagegen wollen wir

fallen lassen und untersuchen, ob dadurch die etwaige praktische Ausführbarkeit des Processes beeinflusst wird. Hierzu denken wir uns einen einfachen Apparat. In Fig. 2 sei *A* die Seifenblase an der engen Oeffnung eines Glasrohres, *B* ein Metallstab mit Kugel, wodurch die Verbindung der Blase mit den Elektricitätsbehältern vermittelt wird, *C* ein dichtschliessender Stempel, den man mit Gewichtstücken belastet. Ausserhalb des Apparates sei Atmosphärendruck.

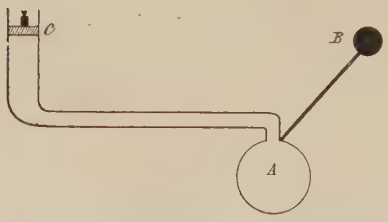

Fig. 2.

Die Menge der im Rohr und in der Blase eingeschlossenen Luft bleibt bei dem Process constant. Die Veränderungen, die mit derselben vorgenommen werden, seien isotherm. Auf die Luft im Apparat wirkt nun ein Druck, der sich zusammensetzt aus

1. dem Spannungsdruck *a* der Blase,
2. dem Atmosphärendruck *b*,
3. dem elektrischen Oberflächendruck *c*.

Führt man den betreffenden Kreisprocess aus, so ist das Resultat das folgende:

1. die eingeschlossene Luft hat gleichen Druck und gleiches Volumen wie am Anfang;

2. die während des ganzen Processes von aussen zugeführte Wärme ist Null, da die Luft sich stets auf derselben Isotherme bewegt;

3. die vom Spannungsdruck geleistete Gesammtarbeit ist Null, weil die Beziehung zwischen Spannungsdruck und Volumen während des Processes dieselbe bleibt und derselbe Weg zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird;

4. dasselbe gilt von der von dem Atmosphärendruck geleisteten Arbeit;

5. nur die von den elektrischen Druckkräften geleistete Arbeit ist von Null verschieden, da hier der Hinweg ein anderer als der Rückweg ist. Die geleistete Arbeit wird geometrisch durch die vom Wege umschlossene Fläche repräsentirt. Sie ist den elektrischen Energiequellen entnommen und wird am

Stempel C gewonnen, wie man leicht findet, falls man berücksichtigt, dass die von der eingeschlossenen Luft geleistete Arbeit Null ist. Diese letztere setzt sich aus der am Stempel und an der Oberfläche der Blase geleisteten Arbeit zusammen. Es ist daher:

$$\int p\,(d\,v_1 + d\,v_2) = 0\,,$$

wo wir unter $d\,v_1$ die durch das Heben oder das Sinken des Stempels, unter $d\,v_2$ die durch die Ausdehnung der Blase entstandene Volumenänderung verstehen. Ferner ist:

$$p = a + b - c\,,$$

folglich:

$$\int p\,.\,d\,v_1 + \int (a + b)\,d\,v_2 - \int c\,d\,v_2 = 0.$$

Nun ist bewiesen, dass

$$\int (a + b)\,d\,v_2 = 0,$$

mithin ist:

$$\int p\,.\,d\,v_1 = \int c\,d\,v_2\,.$$

Am Schluss des Processes wird also ein Gewicht sich auf höherem Niveau befinden wie am Anfang desselben. — Es sei noch darauf hingewiesen, dass bei grösserer Belastung des Stempels die Blase sich nicht etwa ausdehnt, sondern zusammenzieht.

Einen Begriff von den Grössenverhältnissen bei einem derartigen Process sollen einige Zahlenbeispiele geben. Zu Grunde gelegt ist bei allen Angaben das C.G.S.-System. Wir wollen den Arbeitswerth von zwei Kreisprocessen ermitteln und betrachten als gegebene Grössen V_1, V_2 r_a und r_b. Die zu gewinnende Arbeit ist nach (15) und (16) Theil I:

$$A = (8\,\pi)^{-1/2}(V_1^3 - V_2\,V_1^2)(p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2})\,.$$

Es ist aber allgemein

$$p = \frac{1}{8\,\pi}\frac{V^2}{r^2},$$

also

$$A = \frac{V_1}{8\,\pi}(V_1 - V_2)(r_b - r_a)\,.$$

Diese nebst den beiden anderen leicht ableitbaren Formeln

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_d}{r_a} = \frac{r_c}{r_b}$$

gestatten, die gewünschten Grössen bequem zu berechnen.

Die folgende Tabelle giebt die Resultate.

	V_1	V_2	$\frac{r_a}{p_a}$	$\frac{r_b}{p_b}$	A
			2	3	
I. Process	80	40	63,7	28	172
			1	3	
II. Process	30	10	120	13,3	47,8

Die Ausdehnung, die eine Seifenblase bei der Verbindung mit einem Elektricitätsbehälter vom Potential V erfährt, ist äusserst gering. Bezeichnet man den Radius der Blase vor der Ladung mit r, den äusseren Druck mit a, den inneren mit p_1, die Spannung mit T, so ist vor der Ladung

$$p_1 = a + \frac{4T}{r}.$$

Nach der Ladung ist, wenn p_2 der innere Druck, x der Radius ist,

$$p_2 + \frac{1}{8\pi}\frac{V^2}{x^2} = w + \frac{4T}{x},$$

ferner ist

$$p_1 \frac{4}{3}\pi r^2 = p_2 \frac{4}{3}\pi x^3,$$

sodass schliesslich folgt

$$x^3 + \frac{4T}{a}x^2 - \frac{V^2}{8\pi a}x - \frac{r^3}{a}\left(a + \frac{4T}{r}\right) = 0.$$

Die Untersuchung dieser Gleichung ergiebt, dass x nur dann von r sehr abweicht, wenn a und T klein, V gross ist.

Bei

$$V = 30\,ESE, \quad T = 0{,}045 \,.\, 981\ \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}},$$

$$r = 3\text{ cm}, \quad a = 760\text{ mm Quecksilberdruck}$$

ist die Vergrösserung von r

$$\delta = 0{,}0001\text{ cm},$$

bei $a = 0$

$$\delta_0 = 0{,}026\text{ cm}.$$

Eine experimentelle Durchführung des Kreisprocesses war mir leider nicht möglich. Ich beschränkte mich deshalb bei meinen Versuchen schliesslich darauf, die Druckänderungen nachzuweisen, die durch die elektrische Ladung einer Seifenblase im Inneren derselben entstehen. Dazu bediente ich mich einer Methode, deren Theorie ich zunächst entwickeln will.

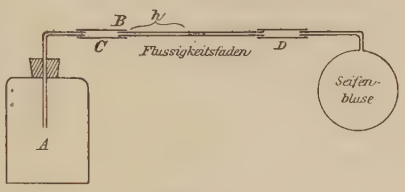

Fig. 3.

Es sei A eine Flasche mit eingesetztem Glasrohr (vgl. Fig. 3), mit dem eine Capillare verbunden ist, an welche wiederum ein Glasrohr anschliesst, das die Seifenblase trägt. Beide Räume, der des Ballons A und der Seifenblase sind durch einen Flüssigkeitsfaden gegeneinander abgesperrt. Wird die Blase geladen, so tritt innerhalb derselben eine Druckänderung ein, und infolge dessen eine Verschiebung des Fadens, bis der Druck in beiden Räumen wieder derselbe ist.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu prüfen, nehmen wir an, dass vor der Ladung der Druck p, nach der Ladung der Druck $p + a$ herrscht. Die dadurch hervorgerufene Verrückung x des Fadens ist zu berechnen. Ist v das Volumen von A und des Rohres bis B, h die Entfernung des Fadens von B, r der Radius der Capillare, so ist am Anfange des Versuches

$$p(v + \pi r^2 h) = c,$$

wo c eine Constante ist, am Ende

$$(p + a)(v + \pi r^2 h - \pi r^2 x) = c,$$

falls wir so lange warten, bis sich etwaige Temperaturänderungen ausgeglichen haben und wir also berechtigt sind, den Vorgang als isotherm zu betrachten.

Daraus folgt

$$p(v + \pi r^2 h) = (p + a)(v + \pi r^2 h - \pi r^2 x),$$

$$x = \frac{a(v + \pi r^2 h)}{\pi r^2 (p + a)},$$

x wird also um so grösser, je grösser v und je kleiner r ist.

Nehmen wir z. B.

$$v + \pi r^2 h = 2000\,\text{cm}^3; \quad p = 10^6 \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2},$$

also etwa 1 Atm., $r = 0{,}05$ cm, so wird die Verrückung bei $a = 1$ Dyne/cm^2:

$$x' = 0{,}25\,\text{cm}.$$

Der Apparat, der im wesentlichen in Fig. 3 skizzirt ist, war derartig eingerichtet, dass ein Dreiweghahn die Verbindung einerseits zwischen Seifenblase, Capillare und Ballon, andererseits zwischen Seifenblase und dem Schlauch zum Anblasen ermöglichte.

Die Blase hing an einer Metallhalbkugel, in deren Kuppe ein feines Metallrohr endigte. Diese Kugel wurde isolirt von einer grösseren Metallhalbkugel umschlossen, sodass die Schnittflächen beider Kugeln in einer Ebene lagen. Die äussere Schutzkugel konnte durch Unterschieben einer zweiten Halbkugel zur Vollkugel ergänzt werden. Diese Anordnung ist zum Theil einer Arbeit von Waitz [1]) entnommen.

Wegen der hohen Empfindlichkeit des Apparates gegen Wärmewirkungen und Erschütterungen wurden die Messungen im Keller und zwar in späten Abendstunden ausgeführt. Der Ballon A stand in einem Wasserbade. Als Sperrfaden diente Alkohol. Die Wände der Capillare waren natürlich von derselben Flüssigkeit benetzt, damit die Länge des Fadens während eines Versuches merklich constant blieb. Um den Apparat zu prüfen, wurden einige Folgerungen aus der Theorie desselben zu bestätigen versucht.

Aus der Formel für die Verschiebung des Fadens ergiebt sich für gleiches a und p und verschiedenes r die Beziehung

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

wo x_1 die Verschiebung des Fadens in der Capillare mit dem Radius r_1, x_2 diejenige in der Capillare mit dem Radius r_2 ist. Vorausgesetzt ist dabei, dass a gegen p, $\pi r^2 h$ gegen v vernachlässigt werden darf, was in der That gestattet ist. Der Radius der Seifenblase war $R_1 = 2{,}02$ cm. Die folgende Tabelle giebt das Resultat:

x_1	0,50	0,55	0,55	0,58
x_2	1,10	1,00	1,20	1,10

1) K. Waitz, Wied. Ann. **37.** p. 330. 1889.

Der Mittelwerth von x_1 ist demnach $x_1 = 0{,}57$, von x_2 $x_2 = 1{,}10$,

$$\frac{x_2}{x_1} = 1{,}93.$$

r_1^2/r_2^2 wurde durch Calibriren der Capillaren mit Quecksilber aus zwei Messungen mit 2,03 und 2,06, im Mittel also zu 2,045 gefunden. Die Differenz ist:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{x_2}{x_1} = 0{,}115.$$

Also weicht x_2/x_1 gegen r_1^2/r_2^2 um $5\,^3/_4$ Proc. ab.

Ein zweiter Versuch bezweckte die Prüfung des Gesetzes, dass der von einer Seifenblase nach Innen ausgeübte Druck $4\,T/R$ ist.

Setzt man dieses Gesetz als richtig voraus, so folgt:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\beta}{\alpha},$$

wenn R_1 und R_2 die Radien der Seifenblasen, β und α die dazugehörigen Verschiebungen des Fadens sind und $\pi r_2^2 \beta$ und $\pi r_2^2 \alpha$ gegen v vernachlässigt werden darf. Als Capillare wurde die mit dem Radius r_2 benutzt. Es war also

$$\beta = x_2 = 1{,}1\,.$$

Für α ergab sich:

$$0{,}60, \quad 0{,}55, \quad 0{,}55, \quad 0{,}65;$$

im Mittel $\alpha = 0{,}575$, folglich:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1{,}913\,.$$

Ferner war

$$R_2 = 4{,}02, \qquad R_1 = 2{,}02,$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 1{,}99, \qquad \frac{R_2}{R_1} - \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}077.$$

Die Abweichung von β/α gegen R_2/R_1 beträgt demnach $3\,^3/_4$ Proc.

Die Versuche mit geladenen Seifenblasen blieben leider nur qulitativ. Es konnte constatirt werden, dass der Faden bei der Ladung der Blase sich in der nach der Theorie bestimmten Richtung verschiebt, bei der Entladung wieder zurückgeht. Auf eine Messung von elektrischen Potentialen hoffe ich später noch einmal zurückzukommen.

Gegen die angestellten Messungen lässt sich ein Einwand erheben. Es ist nämlich stillschweigend angenommen, dass der Radius der Seifenblase constant bleibt, wenn man ihre Verbindung mit dem Ballon A herstellt. Dies ist indessen nicht der Fall. Die Blase wird ihre Gestalt vielmehr verändern, sie wird ein Calotte über der Metallhalbkugel werden mit grösserem Radius als diese. Wollte man den so entstehenden Fehler berechnen, so würde man auf rechnerische Schwierigkeiten stossen, die man durch eine Ueberlegung umgehen kann. Die durch die Verschiebung des Fadens und die Gestaltänderung der Blase entstehende Volumenänderung in dem Theile D des Apparates muss nämlich positiv sein, weil nach dem Druckausgleich zwischen C und D der Druck in D gesunken ist. Da aber die Volumenänderung der Blase negativ ist, so kann sie, absolut genommen, nicht grösser sein als die Volumenänderung durch Verschiebung des Fadens. Diese letztere aber giebt der Versuch. In einer unserer Messungen mit der Capillare vom Radius r_1 und der Metallkugel vom Radius R_1 beträgt sie 0,01762. Durch Probiren ergiebt sich, dass der Radius der Calotte weniger als 0,0001 grösser ist, als der Radius der Blase vor dem Druckausgleich, sodass es zulässig sein dürfte,

$$\frac{4\,T}{1{,}01} = \frac{4\,T}{1{,}0101}$$

zu setzen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate sind folgende:

1. Die beim Kreisprocess gewonnene Arbeit war

$$\frac{V_1}{8\,\pi}(V_1 - V_2)(r_b - r_a).$$

2. Die zwischen den Energiemengen, welche den Quellen entzogen waren, bestehende Beziehung ist:

$$\frac{E_1}{V_1} - \frac{E_2}{V_2} = 0.$$

3. Es ist kein Process möglich, der nur in einer Ueberführung elektrischer Energie von einem Potential auf ein anderes besteht.

4. Die durch die Ladung einer Seifenblase entstehenden Volumenänderungen sind sehr klein und hängen vom Anfangsdruck, Flächenspannung und Ladungspotential ab.

5. Das Verhältniss der Querschnitte von zwei Capillaren wurde bis auf $5\,^3/_4$ Proc., das Gesetz

$$p = \frac{4\,T}{r}$$

bis auf $3\,^3/_4$ Proc. Abweichung bestimmt.

6. Versuche mit geladenen Seifenblasen blieben nur qualitativ.

7. Die durch Verschiebung des Fadens entstehende Gestaltänderung der Blase ist im allgemeinen zu vernachlässigen.

Zum Schluss sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Wachsmuth, für das rege Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.